Seri bahan kuliah Algeo #9

Determinan
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}

= determinan upa-matriks (*submatrix*) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris *i* dan kolom *j*

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Misalkan A adalah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, untuk menghitung M_{11} tidak melibatkan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{6} & \cancel{-3} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 2 & -4 \\ \cancel{1} & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

Untuk menghitung M_{23} tidak melibatkan elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{-4} \\ 1 & 5 & \cancel{3} \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (6)(5) - (-3)(1) = 33$$

Contoh 1: Tinjau matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Minor entri dan kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 26$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(1) = 10$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -10$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (2)(1) = 8$

$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 8$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (6)(3) - (1)(1) = 17$

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = 17$

dan seterusnya untuk M_{21}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33} dihitung dengan cara yang sama

dan seterusnya untuk C_{21}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33} dihitung dengan cara yang sama

- Jadi, kofaktor C_{ij} berkoresponden dengan minor entri M_{ij}, hanya berbeda tanda (positif atau negatif, tergantung nilai *i* dan *j*)

- Cara mengingat tanda positif dan negative untuk C_{ij} adalah dengan memperhatikan pola berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan kofaktor, maka determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan <u>salah satu</u> dari persamaan berikut:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$
$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara baris

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$
$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara kolom

Contoh 2: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut (misalkan acuannya adalah baris pertama matriks A):

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\{(0)(-3) - (4)(2)\} + 1\{(5)(-3) - (4)(8)\} + 2\{(5)(2) - (0)(8)\}$

$= 3(-8) + (-47) + 2(10)$

$= -24 - 47 + 20$

$= -51$

- Misalkan digunakan kolom kedua sebagai acuan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$\det(A) = -(-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \{(5)(-3) - (4)(8)\} + 0 - 2\{(3)(4) - (2)(5)\}$$
$$= (-15 - 32) - 2\,(12 - 10)$$
$$= (-47) - 2\,(2)$$
$$= -51$$

Contoh 3: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

det(A) = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left\{2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\right\} - 5\left\{1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right\} + \dots$$

$$= -18$$

- **Tips 1**: gunakan acuan baris/kolom yang banyak 0 untuk menghemat perhitungan.

Contoh 4: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-4) + 0 + 0$$

$$= 12$$

- **Tips 2**: terapkan OBE untuk memperoleh baris yang mengandung 0

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (dari Contoh 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{R3 – 2R2} \\ \text{R4 – 3R2}}}{\overset{\text{R1 – 3R2}}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

det(A) = $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{R3 + R1}}{\sim} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 18$

Matriks Kofaktor

- Misalkan A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}.
- Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Adjoin* dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = transpose matriks kofaktor

Contoh 6: Tentukan matriks kofaktor dan adjoin dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Maktriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks kofaktor: $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Mencari matriks balikan menggunakan adjoin

- Balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$$

Contoh 7. Determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ setelah dihitung adalah det(A) = 64.

Maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & -10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/64 & 4/64 & 12/64 \\ 6/64 & 2/64 & -10/64 \\ -16/64 & -10/64 & 16/64 \end{bmatrix}$$

Kaidah Cramer

- Jika A**x** = **b** adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) $\neq$ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Diberikan SPL

$$-x + 2y - 3z = 1$$

$$2x \qquad + \quad z = 0$$

$$3x - 4y + 4z = 2$$

Hitung solusinya dengan kaidah Cramer!

Penyelesaian: A**x** = **b**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

- Hitung determinan masing-masing A_j:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

- Hitung nilai x_i sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut dengan ekspansi kofaktor:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$